1 - النهايات - الاستمرارية

معارف

I - النهايات

• نهايات مجموع أو جداء أو حاصل قسمة دالتين

f و g دالتان عدديتان، α عدد حقيقي أو $-\infty$ أو $+\infty$. ℓ و ℓ' عددان حقيقيان
الجداول التالية تقدم المبرهنات المتعلقة بنهايات الدوال المقررة في السنة الثالثة من التعليم الثانوي.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ هي	و $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ هي	فإن $\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)+g(x))$ هي
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to\alpha} \|f(x)\|$ هي	و $\lim\limits_{x\to\alpha} \|g(x)\|$ هي	فإن $\lim\limits_{x\to\alpha} \|f(x)\times g(x)\|$ هي
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell\neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to\alpha} \|f(x)\|$ هي	و $\lim\limits_{x\to\alpha} \|g(x)\|$ هي	فإن $\lim\limits_{x\to\alpha} \left\|\frac{g(x)}{f(x)}\right\|$ هي
ℓ	ℓ' حيث $\ell'\neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell\neq 0$	0	$+\infty$
0	0	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.
ℓ	$+\infty$	0
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.

• ملاحظة : الحالات التي لا تسمح فيها المبرهنات بالنص على نتيجة تسمى حالات عدم التعيين، عددها أربعة و هي من الأشكال التالية : $+\infty-\infty$ ؛ $0\times\infty$ ؛ $\frac{0}{0}$ ؛ $\frac{\infty}{\infty}$

معـــارف

• النهايات و الحصر

1 . f ، g و h هي دوال معرفة في جوار $+\infty$ حيث $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ؛ ℓ عدد حقيقي.

إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

2 . f و g دالتان عدديتان معرفتان في جوار $+\infty$ حيث $f(x) \geq g(x)$.

إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3 . f و g دالتان عدديتان معرفتان في جوار $+\infty$ حيث $f(x) \leq g(x)$.

إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

• نهاية دالة كثير الحدود

f دالة كثيرة الحدود معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

حيث $a_n \neq 0$ و n عدد طبيعي غير منعدم.

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (a_n x^n)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (a_n x^n)$

• نهاية دالة ناطقة

f دالة ناطقة حيث : $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + ... + b_1 x + b_0}$ ؛ $a_n \neq 0$ و $b_p \neq 0$.

$n \in \mathbb{N}^*$ و $p \in \mathbb{N}^*$.

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}\right)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}\right)$

• نهاية دالة مركبة

f ، g و h دوال عددية حيث $h = g \circ f$ ؛ a ، b و ℓ أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$.

إذا كان $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ و $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell$ فإن $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$.

• السلوك التقاربي

f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $]a ; +\infty[$ أو $]a ; a[$ أو $]-\infty ; a[$

حيث a عدد حقيقي معلوم و b عدد حقيقي. $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم.

• إذا كان $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (أو $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$) فإن المستقيم ذا المعادلة $x = a$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$، يوازي محور التراتيب.

• إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (أو $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$) فإن المستقيم ذا المعادلة $y = b$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$، يوازي محور الفواصل.

• إذا كان $f(x) = mx + p + \varphi(x)$ حيث m ، p عددان حقيقيان و $m \neq 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$
(أو $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$) فإن المستقيم ذا المعادلة $y = mx + p$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$.

• إذا كان $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ و $\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - mx] = p$ حيث m ، p عددان حقيقيان و $m \neq 0$

فإن المستقيم ذا المعادلة $y = mx + p$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$.

. إذا كان $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$ و $\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - mx] = +\infty$ حيث $m \neq 0$ فإن $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحى المستقيم ذو المعادلة $y = mx$.

. إذا كان $m = 0$ فأن $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحى محور الفواصل.

. إذا كان $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (أو $-\infty$) فإن $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحى محور التراتيب.

II - الاستمرارية

f دالة معرفة على مجموعة D، a عدد حقيقي غير منعدم من D. I مجال محتوى في D.

. f مستمرة عند a يعني $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

. f مستمرة على I يعني f مستمرة عند كل عدد حقيقي a من I.

• العمليات الجبرية

f و g دالتان معرفتان على مجال I، a عدد حقيقي ينتمي إلى I.

. إذا كانت f و g مستمرتين عند a فإن الدالتين $f + g$ و $f \times g$ مستمرتان عند a.

. إذا كانت g مستمرة عند a و $g(a) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{1}{g}$ مستمرة عند a.

. إذا كانت f و g مستمرتين عند a و $g(a) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{f}{g}$ مستمرة عند a.

. إذا كانت f مستمرة عند a و g مستمرة عند $f(a)$ فإن الدالة gof مستمرة عند a.

. الدوال كثيرة الحدود، sin ، cos ، $x \longmapsto |x|$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

. الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها .

. الدالة $x \longmapsto \sqrt{x}$ مستمرة على المجال $[0 ; +\infty[$.

• مبرهنة القيم المتوسطة

f دالة معرفة على المجال $[a ; b]$.

. إذا كانت f مستمرة على المجال $[a ; b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي m محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c في المجال $[a ; b]$ حيث $f(c) = m$.

• التفسير الهندسي

. المستقيم ذو المعادلة $y = m$ يقطع المنحنى الممثل للدالة f في نقطة على الأقل، فاصلتها c تنتمي إلى المجال $[a ; b]$.

ملاحظة : . إذا كانت f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a ; b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي m محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد عدد حقيقي c وحيد ينتمي إلى المجال $[a ; b]$ حيث $f(c) = m$.

. إذا كانت f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a ; b]$ حيث $f(a) . f(b) < 0$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال $]a ; b[$.

1 حساب نهاية مجموع أو جداء أو حاصل قسمة دالتين

تمرين

احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}\right)$ ؛ $\lim\limits_{x \to 0}\left(\sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}\right)$ ؛ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$

$\lim\limits_{x \to -\infty}(x^3 + x)$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty}(x^3 + x)$.

حل

• حساب النهاية $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}\right)$.

الدالة $x \longmapsto 1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}$ معرفة على المجموعة $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\frac{2}{x}\right) = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{9}{x^2} = 0$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}\right) = 1$.

• حساب النهاية $\lim\limits_{x \to 0}\left(\sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}\right)$.

الدالة $x \longmapsto \sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}$ معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$.

لدينا $\lim\limits_{x \to 0}\sqrt{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (لأن $\sin x \approx x$ بجوار العدد 0)

إذن $\lim\limits_{x \to 0}\left(\sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$

• حساب النهاية $\lim\limits_{x \to 1}\frac{3x}{(x-1)(x+2)}$.

الدالة $x \longmapsto \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$ معرفة على المجموعة $\mathbb{R} - \{-2 ; 1\}$.

لدينا $\lim\limits_{x \to 1}(3x) = 3$ و $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)(x+2) = 0$.

من أجل كل عدد x قريب من 1 حيث $x < 1$ ؛ $(x-1)(x+2) < 0$.

و من أجل كل عدد x قريب من 1 حيث $x > 1$ ؛ $(x-1)(x+2) > 0$.

حسب المبرهنات المقدمة في الجداول السابقة ؛

ينتج أن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1}\frac{3x}{(x-1)(x+2)} = -\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1}\frac{3x}{(x-1)(x+2)} = +\infty$

• حساب النهاية $\lim\limits_{x \to -\infty}(x^3 + x)$.

الدالة $x \longmapsto x^3 + x$ معرفة على $\mathbb{R}$.

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to -\infty}(x^3 + x) = -\infty$.

• حساب النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty}(x^3 + x)$.

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty}(x^3 + x) = +\infty$.

2 رفع حالة عدم التعيين

تمرين

أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2+x+1)$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+\sqrt{x}}{x-1}$ ؛

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}(x^2+3\sqrt{x})$.

حل

• حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2+x+1)$. الدالة $x\longmapsto x^3-x^2+x+1$ معرفة على $\mathbb{R}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty$

المبرهنة المتعلقة بنهاية مجموع دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم، $x^3-x^2+x+1=x^3\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=1$.

ينتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2+x+1)=+\infty$.

• حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+\sqrt{x}}{x-1}\right)$. الدالة $x\longmapsto\dfrac{4x+\sqrt{x}}{x-1}$ معرفة على $\mathbb{R}^+-\{1\}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x+\sqrt{x})=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$.

المبرهنة المتعلقة بنهاية حاصل قسمة دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x يختلف عن 1

$$\frac{4x+\sqrt{x}}{x-1}=\frac{x\left(4+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{4+\frac{\sqrt{x}}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{4+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=4$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+\sqrt{x}}{x-1}=4$.

• حساب النهاية $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. الدالة $x\longmapsto\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)=0$ و $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$.

المبرهنة المتعلقة بنهاية حاصل قسمة دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

نعلم أن $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛ $\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$

بوضع $y = \frac{x}{2}$ يكون $\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$ و $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2$

نعلم أن $\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right) = 1$. إذن $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) = 1$.

ينتج أن $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1$. و بالتالي $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$.

• حساب النهاية $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}(x^2+3\sqrt{x})$. الدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}(x^2+3\sqrt{x})$ معرفة على $]0\,;+\infty[$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} (x^2+3\sqrt{x}) = +\infty$.

المبرهنة المتعلقة بنهاية جداء دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ؛ $\frac{1}{x}(x^2+3\sqrt{x}) = \frac{x^2}{x} + \frac{3\sqrt{x}}{x} = x + \frac{3}{\sqrt{x}}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$. إذن $\lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$. ينتج أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}(x^2+3\sqrt{x}) = +\infty$

3 إستعمال الحصر لحساب نهاية دالة

تمرين

احسب النهايات التالية :

$\lim_{x\to+\infty} (2x - \sin x)$ ؛ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ ؛ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}$.

حل

• حساب النهاية $\lim_{x\to+\infty}(2x - \sin x)$. الدالة $x \longmapsto (2x - \sin x)$ معرفة على $\mathbb{R}$.

نعلم أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $-1 \le \sin x \le 1$

إذا كان $x \ge 0$ فإن $-1 \le \sin x \le 1$ و $-1 \le -\sin x \le 1$

ينتج أن $2x - 1 \le 2x - \sin x \le 2x + 1$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}(2x - 1) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(2x + 1) = +\infty$

و $2x - 1 \le 2x - \sin x \le 2x + 1$. إذن $\lim_{x\to+\infty}(2x - \sin x) = +\infty$.

• حساب النهاية $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$. الدالة $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$.

من أجل أن كل عدد حقيقي x ؛ $-1 \le \sin x \le 1$.

إذا كان $x > 0$ فإن $-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$. لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$.

• حساب النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}$. الدالة $x \longmapsto \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}$ معرفة على المجال $]0\,;+\infty[$.

من أجل أن كل عدد موجب تماما x ؛ $-1 \le \cos x \le 1$. و بالتالي $1 \le 2 + \cos x \le 3$.

بما أن $\sqrt{x} > 0$ على المجال $]0\,;+\infty[$ فإن $\frac{1}{\sqrt{x}} \le \frac{2+\cos x}{x} \le \frac{3}{\sqrt{x}}$

نعلم أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} = 0$.

4 حساب نهاية دالة مركبة

تمرين

احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+3}$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}$ ؛ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

حل

• حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+3}$. الدالة $x\longmapsto\sqrt{2x+3}$ معرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

لتكن f الدالة $x\longmapsto 2x+3$ المعرفة على $\left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$

و g الدالة $y\longmapsto\sqrt{y}$ المعرفة على $[0\,;+\infty[$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$ ؛ $(g\circ f)(x)=\sqrt{2x+3}$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)=+\infty$ و $\lim\limits_{y\to+\infty}\sqrt{y}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+3}=+\infty$.

• حساب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}$.

الدالة $x\longmapsto\sqrt{x^2-x}$ معرفة على المجموعة $]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{y}=+\infty$. إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty$.

• حساب النهاية $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

الدالة $x\longmapsto\dfrac{\sin 3x}{x}$ معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$.

من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛ $3\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)=\dfrac{\sin 3x}{x}$.

بوضع $y=3x$ نلاحظ أن y يؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى 0 .

و نعلم أن $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin y}{y}=1$. إذن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=1$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to0}3\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)=3$ أي $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}=3$.

5 البحث عن المستقيمات المقاربة للمنحنى الممثل لدالة

تمرين 1

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x+2}$.

و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم.

1 . ادرس نهاية الدالة f عن اليمين و عن اليسار عند 2- . ماذا تستنتج؟

2 . عين ثلاثة أعداد حقيقية a، b و c حيث من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}-\{-2\}$ ؛

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$.

3 . استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له.

حل

1 . الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$. لدينا $\lim_{x\to-2}(3x^2+1)=13$ ، $13>0$ ، $\lim_{x\to-2}(x+2)=0$.

إشارة $x+2$ ملخصة في الجدول المقابل .

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
$x+2$	$-$ 0 $+$

ينتج أن $\lim_{x \overset{>}{\to} -2} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x \overset{<}{\to} -2} f(x)=-\infty$.

و بالتالي فالمستقيم ذو المعادلة $x=-2$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$، (يوازي محور التراتيب).

2 . باستعمال القسمة الإقليدية لكثير الحدود $3x^2+1$ على كثير الحدود $x+2$ نجد حاصل القسمة هو $3x-6$ و باقي القسمة هو 13 .

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-2\}$: $\frac{3x^2+1}{x+2}=3x-6+\frac{13}{x+2}$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-2\}$: $f(x)=3x-6+\frac{13}{x+2}$

ينتج أن الأعداد a، b و c المحققة للشرط هي $a=3$ ؛ $b=-6$ و $c=13$.

(يمكن الحصول على الأعداد a، b و c باستعمال شرط تساوي كثيري حدود).

3 . استنتاج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}3x=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}3x=-\infty$

نلاحظ أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{13}{x+2}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{13}{x+2}=0$

ينتج أن المستقيم ذا المعادلة $y=3x-6$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$.

تمرين 2

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ و $(\mathscr{C}_g)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم. أثبت أن المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $+\infty$.

حل

مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل عدد حقيقي x، $x^2+x+1>0$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+1)=+\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ و بالتالي $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

- حساب $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم : $\frac{g(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$.

- حساب $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-x\right]$. لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)-x=\sqrt{x^2+x+1}-x$

$$=\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

$$=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)=2$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-x\right]=\frac{1}{2}$

نستنتج أن المستقيم ذا المعادلة $y=x+\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$ بجوار $+\infty$.

تمرين 3

h هي الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=\frac{x^2-5}{3x^2+1}$ و $(\mathscr{C}_h)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم. أثبت أن المنحنى $(\mathscr{C}_h)$ يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل.

حل

• الدالة h معرفة على $\mathbb{R}$.

• حساب نهايتي h عند $-\infty$ و $+\infty$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-5}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-5}{3x^2+1}=\frac{1}{3}$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\frac{1}{3}$

و بالتالي المنحنى $(\mathscr{C}_h)$ يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل معادلته $y=\frac{1}{3}$.

6 إثبات إستمرارية دالة عند عدد حقيقي

تمرين

ادرس استمرارية كل دالة من الدوال f ، g و h التالية عند العدد x_0.

1. $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ إذا كان $x\neq 1$ و $f(1)=2$. $x_0=1$

2. $g(x)=\frac{2x}{\sin x}$ إذا كان $x\neq 0$ و $g(0)=0$. $x_0=0$

3. $h(x)=\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$ إذا كان $x\neq 3$ و $h(3)=4$. $x_0=3$

حل

1. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

• حساب $\lim\limits_{x\to1}f(x)$. لدينا $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$ و $\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x}-1)=0$.

إذن لا توجد مبرَهنة تسمح بإعطاء النتيجة (أي توجد حالة عدم التعيين).

لدينا من أجل كل عدد x يختلف عن 1 ؛

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\sqrt{x}+1$$

إذن $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x}+1)=2$. نعلم أن $f(1)=2$ و بالتالي الدالة f مستمرة عند العدد 1.

2. الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$.

• حساب $\lim\limits_{x\to0}g(x)$. لدينا $\lim\limits_{x\to0}(2x)=0$ و $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$. لا توجد مبرهنة تسمح بإعطاء النتيجة.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم، $\frac{2x}{\sin x}=\frac{2}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$

نعلم أن $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = 2$ أي $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 2$.

لدينا $g(0) = 0$. إذن $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq g(0)$. و بالتالي الدالة g ليست مستمرة عند العدد 0.

3. الدالة h معرفة على $\mathbb{R}$.

• حساب $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$. لدينا $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{1+x} - 2 = 0$ و $\lim\limits_{x\to 3} (x-3) = 0$.

لا توجد مبرهنة تسمح بإعطاء النتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 3 ؛ $h(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x-3}$

$$= \frac{(\sqrt{1+x} - 2)(\sqrt{1+x} + 2)}{(x-3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \frac{(1+x) - 4}{(x-3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 2}$$

لدينا : $\lim\limits_{x\to 3} (\sqrt{1+x} + 2) = 4$ إذن $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x-3} = 4$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to 3} h(x) = 4$. نعلم أن $h(3) = 4$.

بما أن $\lim\limits_{x\to 3} h(x) = h(3)$ فإن الدالة h مستمرة عند العدد 3.

7 إستعمال مبرهنة القيم المتوسطة

تمرين

بين أن المعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال المفتوح $]-1 ; 0[$.

حل

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = x^3 + x + 1$.

f معرفة على $\mathbb{R}$ إذن f معرفة على المجال المغلق $[-1 ; 0]$.

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ (لأن f هي مجموع دوال مرجعية معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$).

إذن f مستمرة على $\mathbb{R}$. و بالتالي f مستمرة على المجال $[-1 ; 0]$.

لدينا $f(-1) = -1$ و $f(0) = 1$ إذن $f(-1)$ و $f(0)$ مختلفان في الإشارة.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 3x^2 + 1$.

نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) > 0$. و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ينتج أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1 ; 0]$.

لدينا f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-1 ; 0]$ و $f(-1)$ و $f(0)$ من إشارتين مختلفتين

إذن المعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال المفتوح $]-1 ; 0[$.

تمرين 1

f هي الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$.

ليكن D مجموعة تعريف f و $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 . عين مجموعة التعريف D للدالة f و بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من D ،

$$f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} .$$

2 . احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3 . بين أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $+\infty$.

4 . أثبت أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $-\infty$. عين معادلة لهذا المستقيم.

حل

1 . تعيين مجموعة التعريف D للدالة f . الدالة f : معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2 - 3x + 1 \geq 0$.

دراسة إشارة ثلاثي الحدود $x^2 - 3x + 1$.

$\Delta = 5$ ، $\Delta > 0$ إذن ثلاثي الحدود $x^2 - 3x + 1$ يقبل جذرين مختلفين في $\mathbb{R}$ هما : $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

• باستعمال المبرهنات حول إشارة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية،

ينتج أن $x^2 - 3x + 1 \geq 0$ على $\left]-\infty ; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$ = D .

• كتابة $f(x)$ على الشكل $\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$. ثلاثي الحدود $x^2 - 3x + 1$ يكتب على الشكل النموذجي كما يلي : $x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من D : $f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$.

2 . حساب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

لدينا $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$

إذن $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} = +\infty$. و بالتالي $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

لدينا أيضا $\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$

ينتج أن $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} = +\infty$. و بالتالي $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3 . إثبات أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $+\infty$.

لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• حساب $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

لدينا من أجل كل x من D : $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}{x} = \frac{x\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}$.

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$ إذن $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

• حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$.

من أجل كل عدد حقيقي x موجب من D ، $f(x)-x=\sqrt{x^2-3x+1}-x=\dfrac{-3x+1}{\sqrt{x^2-3x+1}+x}$

$$=\frac{x\left(-3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{-3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{x}\right)=-3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1=2$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=-\frac{3}{2}$

ينتج أن المستقيم ذا المعادلة $y=x-\frac{3}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

4 . البحث عن مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$. لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

• حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x سالب من D ؛ $\dfrac{f(x)}{x}=\left(-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$.

• حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]$. من أجل كل عدد x سالب من D ؛ $f(x)+x=\sqrt{x^2-3x+1}+x$

$$=\frac{-3x+1}{\sqrt{x^2-3x+1}-x}=\frac{x\left(-3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)}=\frac{-3+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3+\frac{1}{x}\right)=-3$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)=-2$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\frac{3}{2}$.

و بالتالي المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=-x+\frac{3}{2}$.

تمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{x-2}$ إذا كان $x\geq 2$
و $f(x)=x^2+kx+1$ إذا كان $x<2$.

• عين العدد الحقيقي k حتى تكون الدالة f مستمرة عند العدد 2 .

حل

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$. إذن الدالة f معرفة عند العدد 2 و $f(2)=0$.

• حساب $\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}\sqrt{x-2}=0$. $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2}f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2}(x^2+kx+1)=5+2k$

لدينا $f(2)=5+2k$ يعني $5+2k=0$ أي $k=-\frac{5}{2}$.

و بالتالي إذا كان $k=-\frac{5}{2}$ فإن $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2}f(x)=0$ (أي $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2}f(x)=f(2)$)

ينتج أن إذا كان $k=-\frac{5}{2}$ فإن $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$.

و بالتالي الدالة f مستمرة عند العدد 2 إذا وفقط إذا كان $k=-\frac{5}{2}$.

العمليات على النهايات

في التمارين من (1) إلى (7)، يطلب حساب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى العدد a.

1 $f(x) = x^2 + x + 1$ ؛ $a = 1$ +∞

2 $f(x) = x^3 + 3x$ ؛ $a = 0$

3 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$ ؛ $a = +\infty$

4 $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$ ؛ $a = +\infty$

5 $f(x) = x^3\left(\cos\frac{1}{x} - 2\right)$ ؛ $a = +\infty$

6 $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ ؛ $a = +\infty$ أو $a = 1$ أو $a = -\infty$.

7 $f(x) = \frac{E(x)}{x}$ حيث $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد x . $a = +\infty$.

في التمارين التالية من (8) إلى (16) ، يطلب تعيين نهايات الدالة f عندما يؤول x إلى a.

8 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$ ؛ $a = 2$ أو $a = -5$ أو $a = +\infty$ أو $a = -\infty$.

9 $f(x) = \frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9}$ ؛ $a = \frac{3}{2}$ أو $a = -\frac{3}{2}$ أو $a = +\infty$ أو $a = -\infty$.

10 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$ ؛ $a = +\infty$.

11 $f(x) = \frac{3x - 5}{x + 1} - \frac{\sin x}{x}$ ؛ $a = +\infty$.

12 $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ ؛ $a = 1$.

13 $f(x) = \frac{1}{x^4}$ ؛ $a = 0$.

14 $f(x) = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$ ؛ $a = 0$.

15 $f(x) = \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}}$ ؛ $a = \frac{\pi}{3}$.

16 $f(x) = \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$ ؛ $a = 0$.

المستقيمات المقاربة

في التمارين من (17) إلى (25).

$(\mathscr{C})$ هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم معطى.

ادرس وجود المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C})$.

17 $f(x) = \frac{x}{x - 1}$

18 $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

19 $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x^2 + 1}$

20 $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x - 5}$

21 $f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x + 1}$

22 $f(x) = x - \sqrt{x}$

23 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

24 $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$

25 نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \cos x - x$$

1 • ادرس نهاية كل من $f(x) - x$ و $\frac{f(x)}{x}$ عندما يؤول x إلى $+\infty$.

2 • بين أن المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f لا يقبل مستقيما مقاربا في جوار $+\infty$.

(لحساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ يمكن إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $-1 - x \leq f(x) \leq 1 - x$)

الاستمرارية

في التمارين من (26) إلى (28).

f دالة عددية و x_0 عدد حقيقي، يطلب دراسة استمرارية الدالة f عند x_0 .

26 $f(x) = x^2 - 2x$ ؛ $x_0 = 1$

27 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ؛ $x_0 = 0$

28 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ؛ إذا كان $x_0 \neq 0$ و $f(0) = 1$.

29 $f(x) = \dfrac{2x^2 + |x|}{x}$ ؛ $x_0 = 0$.

خواص الدوال المستمرة على مجال

30 1) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2x^3 + 5x - 4$.

2) استنتج أن المعادلة $2x^3 + 5x - 4 = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال المفتوح $]0 ; 1[$.

31 نفس السؤال بالنسبة للمعادلة $x^6 + x^2 - 1 = 0$.

32 1) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال $]-1 ; 1[$.

33 f هي الدالة المعرفة كمايلي $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x}$ بين أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا واحدا α في المجال $]2 ; 3[$.

34 بيّن أن المعادلة $\cos x = x$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$.

35 بين أن المعادلة $-x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال المفتوح $]1 ; 3[$.

مسائل

36 f هي دالة عددية معرفة كما يلي $f(x) = \dfrac{5x^2 + x + 1}{x + 2}$.

1) عين مجموعة تعريف D للدالة f و بين أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية a، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي x من D،

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2} .$$

2) ليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.
- حدد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم المقارب المائل له.

37 f دالة عددية معرفة كما يلي :

$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + mx$ ؛ $m \in \mathbb{R}$.

عين نهايات الدالة f عندما يؤول x إلى $-\infty$ أو $+\infty$ (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m).

38 h هي الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$h(x) = \sin(x^2 + x + 1)$

أثبت أن الدالة h مستمرة عند كل عدد حقيقي x_0

39 ادرس $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

40 f هي دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x + 1)^2}$

1) بين أنه يوجد عددان حقيقيان a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 ؛

$$f(x) = ax + b + \varphi(x)$$

حيث $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$.

2) عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

3) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f في معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

41 طول حرف مكعب هو x cm و أبعاد متوازي المستطيلات هي 1 cm، 3 cm و $(3x + 4)$ cm

أوجد حصرا لقيمة x التي من أجلها يكون حجم المكعب يساوي حجم متوازي المستطيلات.

بين أن $3{,}5 < x < 3{,}6$.